# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## WZORY

SPIS TREŚCI



### 1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej $x$ definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu $x$ od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb $x$, $y$ mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb $a$ oraz $r$, gdzie $r \geq 0$, mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x-a| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

### 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby $a$ definiujemy jej $n$–tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia $n$ z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby $a$ zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba $n$ jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

—— * ——

Niech $m$, $n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech $r$, $s$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki $r$, $s$ są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$, $b \neq 0$.

### 3. Silnia. Symbol Newtona

Silnią liczby całkowitej dodatniej $n$ nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.
Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek:

$$\left(n+1\right)! = n! \cdot \left(n+1\right)$$

—— * ——

Dla liczb całkowitych $n$, $k$ spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(n-k+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Dla $0 \leq k < n$ mamy:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

## 4. DWUMIAN NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ oraz dla dowolnych liczb $a$, $b$ mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

## 5. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Z dwumianu Newtona dla $n = 2$ oraz $n = 3$ otrzymujemy dla dowolnych liczb $a$, $b$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

—— * ——

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ oraz dowolnych liczb $a$, $b$ zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

## 6. CIĄGI

- Ciąg arytmetyczny

Wzór na $n$–ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie $a_1$ i różnicy $r$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Ciąg geometryczny

Wzór na $n$–ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie $a_1$ i ilorazie $q$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych $n$ wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy $K$ złożymy na $n$ lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy $K_n$ wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Granica ciągu

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = h$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = g + h \qquad \lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = g - h \qquad \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = g \cdot h$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $h \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h}$$

— * —

Jeżeli $\left(a_n\right)$, $n \geq 1$, jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $|q| < 1$, to ciąg sum jego początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ma granicę:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

### 7. FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f\left(x\right) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

pomocnej przy sporządzaniu wykresu.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej, czyli liczba pierwiastków równania

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe (równanie kwadratowe ma jeden podwójny pierwiastek):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## 8. LOGARYTMY

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie *a* nazywamy wykładnik *b* potęgi, do której należy podnieść podstawę *a*, aby otrzymać liczbę *c*:

$$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz $r$ zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

## 9. POCHODNA FUNKCJI

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla} \quad c \in R$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{gdy} \quad g(x) \neq 0$$

Pochodne niektórych funkcji:

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-a}{x^2}$$

$$f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = rx^{r-1}$$

gdzie $r \neq 0$, zaś *a*, *b*, *c* – dowolne liczby rzeczywiste.

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja $f$ ma pochodną w punkcie $x_0$, to równanie stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

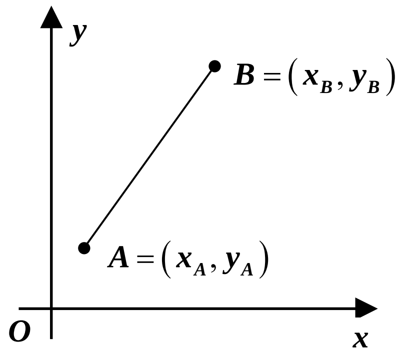
$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

## 10. GEOMETRIA ANALITYCZNA

- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$




Współrzędne środka odcinka $AB$:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- Wektory

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, który przesuwa punkt $A$ na punkt $B$:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś $a$ jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a\cdot\vec{u} = [a\cdot u_1, a\cdot u_2]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki $A$, $B$ nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, prosta jest równoległa do osi $Ox$; jeżeli $B = 0$, prosta jest równoległa do osi $Oy$; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

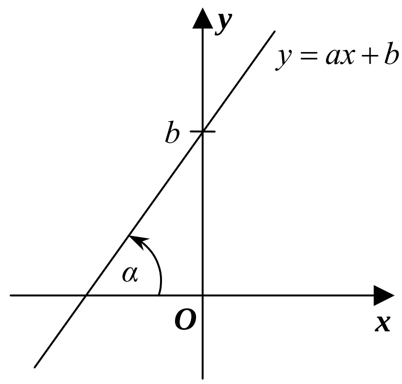
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi $Oy$, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba $a$ to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \mathrm{tg}\alpha$$

Współczynnik $b$ wyznacza na osi $Oy$ punkt, w którym dana prosta ją przecina.




Równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu $P=(x_0,y_0)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$ dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych

$$y=a_1x+b_1 \qquad\qquad y=a_2x+b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1=a_2$,

– są prostopadłe, gdy $a_1a_2=-1$,

– tworzą kąt $\varphi$ taki, że: $0^\circ<\varphi<90^\circ$ i $\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|$.

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad\qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

to odpowiednio:

– są równoległe, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$,

– są prostopadłe, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$,

– tworzą kąt $\varphi$ taki, że: $0^\circ<\varphi<90^\circ$ i $\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$.

- Trójkąt

Pole trójkąta $ABC$ o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$, dane jest wzorem:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta $ABC$, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

- Przekształcenia geometryczne

– przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $(x,y)$ na punkt $(x+a,y+b)$;

– symetria względem osi $Oy$ przekształca punkt $(x,y)$ na punkt $(-x,y)$;

– symetria względem punktu $(a,b)$ przekształca punkt $(x,y)$ na punkt $(2a-x,2b-y)$;

– jednokładność o środku w punkcie $(0,0)$ i skali $s\neq 0$ przekształca punkt $(x,y)$ na punkt $(sx,sy)$.

- Równanie okręgu

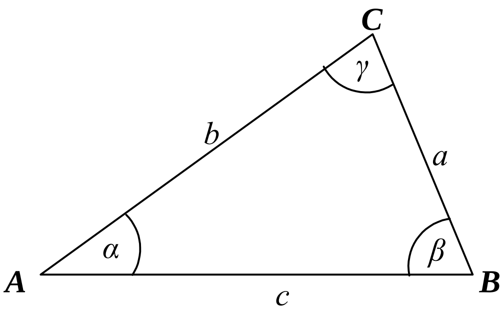
Równanie okręgu o środku w punkcie $(a,b)$ i promieniu $r$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

lub $\quad x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad$ gdzie $r^2=a^2+b^2-c>0$

## 11. PLANIMETRIA

- Oznaczenia




$a$, $b$, $c$ – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków $A$, $B$, $C$;

$2p=a+b+c$ – obwód trójkąta;

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – miary kątów przy wierzchołkach $A$, $B$, $C$;

$h_a$, $h_b$, $h_c$ – wysokości, opuszczone z wierzchołków $A$, $B$, $C$;

$R$, $r$ – promienie okręgów opisanego i wpisanego.

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}=rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

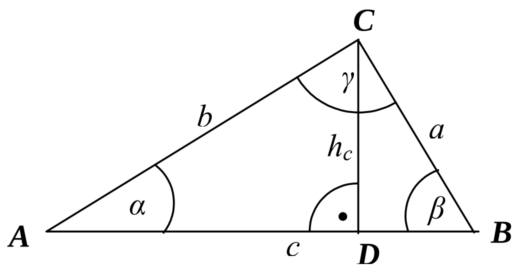
- Twierdzenie cosinusów

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie $ABC$ kąt $\gamma$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2+b^2=c^2$.

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym




Załóżmy, że kąt $\gamma$ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

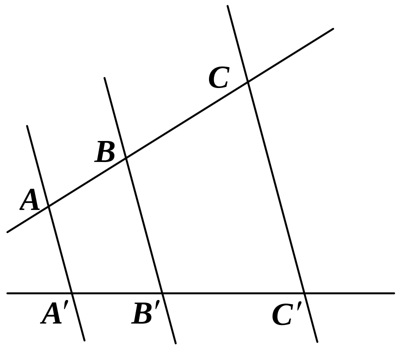
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

$$R = \frac{1}{2}c$$

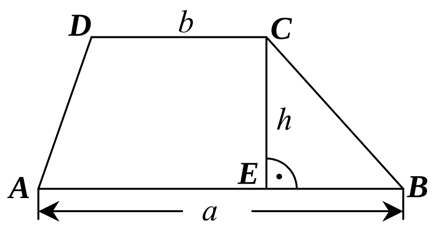
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)




Proste $AA'$, $BB'$, $CC'$ są parami równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

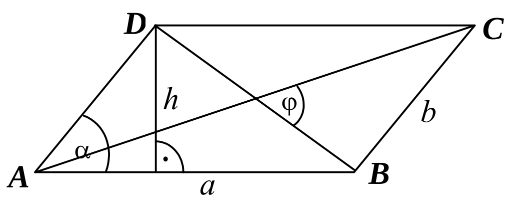
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

- Czworokąty



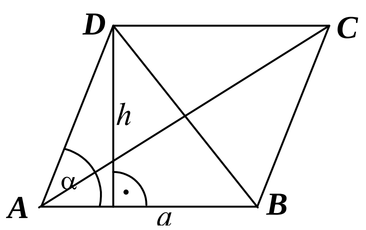

**Trapez**
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



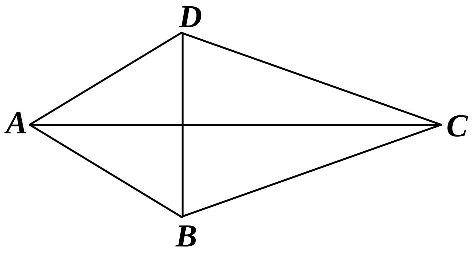

**Równoległobok**
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$




**Romb**
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:

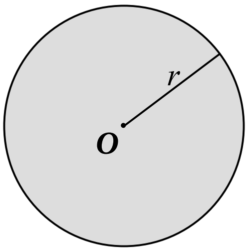
$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$




**Deltoid**
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- Koło



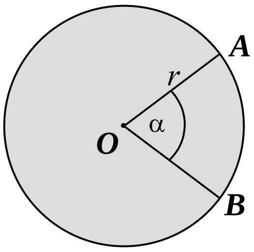

Wzór na pole koła o promieniu $r$:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu $r$:

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła



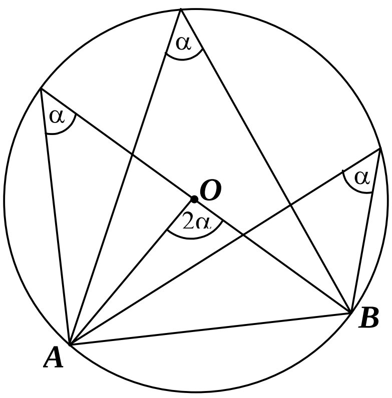

Wzór na pole wycinka koła o promieniu $r$ i kącie środkowym $\alpha^\circ$:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu $r$ i kącie środkowym $\alpha^\circ$:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

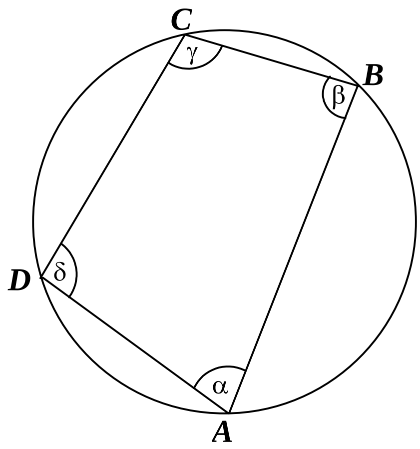
- Kąty w okręgu




Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tych samych łukach, są równe.

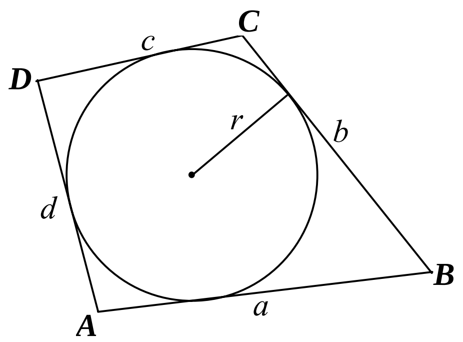
- Okrąg opisany na czworokącie




Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrąg wpisany w czworokąt




W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

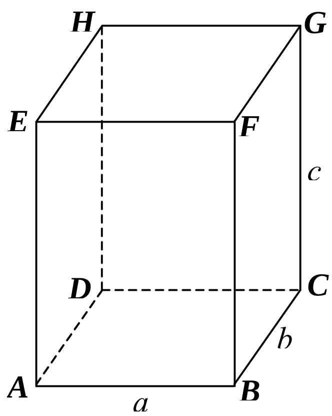
$$a + c = b + d$$

**12. STEREOMETRIA**

- Oznaczenia

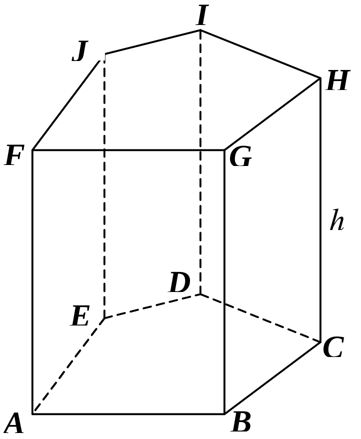
$P$ – pole powierzchni całkowitej
$P_p$ – pole powierzchni podstawy
$P_b$ – pole powierzchni bocznej
$V$ – objętość

- Prostopadłościan




$$P = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$
gdzie $a$, $b$, $c$ są długościami krawędzi prostopadłościanu.

- Graniastosłup prosty

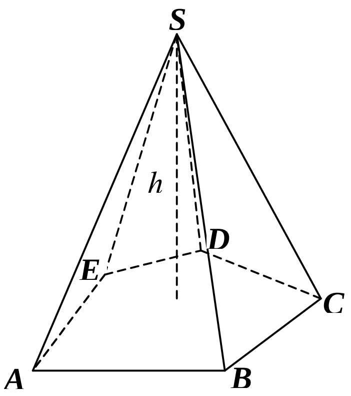



$P_b = 2p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa.

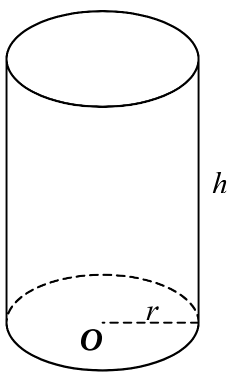
- Ostrosłup




$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

gdzie $h$ jest wysokością ostrosłupa.

- Walec



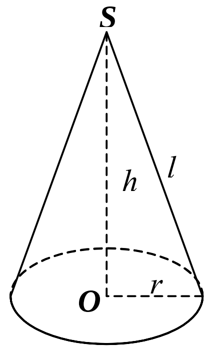

$P_b = 2\pi rh$

$P = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie $r$ jest promieniem podstawy, $h$ wysokością walca.

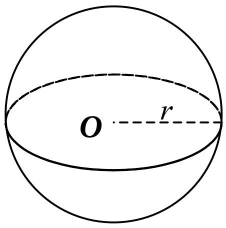
- <u>Stożek</u>




$$P_b = \pi r l$$
$$P = \pi r\left(r + l\right)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie $r$ jest promieniem podstawy, $h$ – wysokością, $l$ –długością tworzącej stożka.

- <u>Kula</u>

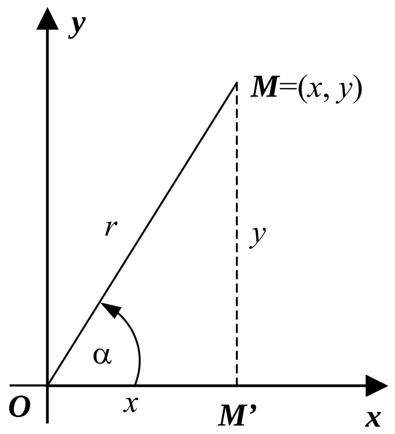



$$P = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie $r$ jest promieniem kuli.

## 13. TRYGONOMETRIA

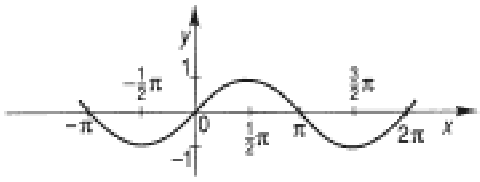
- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych</u>



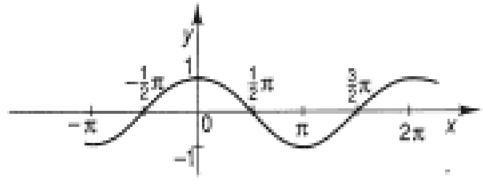

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \left(x \neq 0\right)$$
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

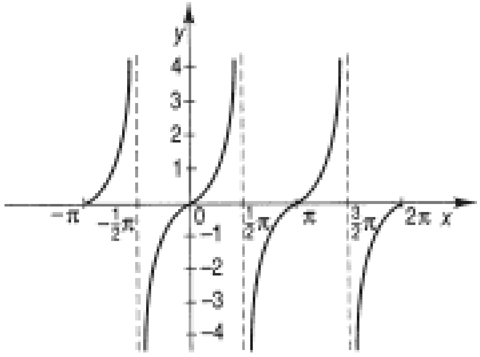
- <u>Wykresy funkcji trygonometrycznych</u>



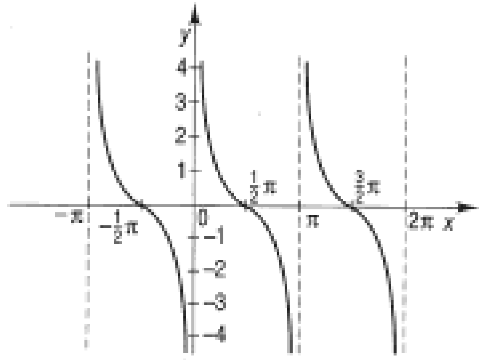
$y = \sin x$



$y = \cos x$




$y = \mathrm{tg}x$




$y = \mathrm{ctg}x$

- <u>Związki między funkcjami tego samego kąta</u>

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $k$ – całkowite

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ dla $\alpha \neq k\pi$ $k$ – całkowite

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $k$ – całkowite

- <u>Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych</u>

| $\alpha$ | $\mathbf{0\,(0^\circ)}$ | $\frac{\pi}{\mathbf{6}}\,\mathbf{(30^\circ)}$ | $\frac{\pi}{\mathbf{4}}\,\mathbf{(45^\circ)}$ | $\frac{\pi}{\mathbf{3}}\,\mathbf{(60^\circ)}$ | $\frac{\pi}{\mathbf{2}}\,\mathbf{(90^\circ)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **sin**$\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| **cos**$\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| **tg**$\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | nie istnieje |
| **ctg**$\alpha$ | nie istnieje | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

- <u>Wzory redukcyjne</u>

| $\varphi =$ | $-\alpha$ | $\alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{\pi}{\mathbf{2}} - \alpha$ | $\frac{\pi}{\mathbf{2}} + \alpha$ | $\frac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{2}} - \alpha$ | $\frac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{2}} + \alpha$ | $\mathbf{2}\pi - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sin**$\varphi$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| **cos**$\varphi$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| **tg**$\varphi$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ |
| **ctg**$\varphi$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ |

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów $\alpha$ , $\beta$ zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

Ponadto, dla tych kątów, dla których prawe strony są określone, mamy równości:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$
$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

- Funkcje potrojonego kąta

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha\left(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)$$
$$\cos 3\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\right)=\cos\alpha\left(4\cos^2\alpha-3\right)$$

- Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

## 14. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba sposobów, w jaki $n \geq 1$ elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z $n$ elementów można utworzyć ciąg, składający się z $k$ ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z $n$ elementów można utworzyć ciąg, składający się z $k$ niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa $n^k$.

- Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród $n$ elementów można wybrać $k$ ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

## 15. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech $\Omega$ będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru $\Omega$.

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ $\Omega$ – zdarzenie pewne

$P(\varnothing) = 0$ $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór $\Omega$)

$P(A) \leq P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$,

zatem $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

- Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- <u>Prawdopodobieństwo warunkowe</u>

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami, przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \mid B)$ zajścia zdarzenia *A* pod warunkiem, że zaszło zdarzenie *B*, nazywamy liczbę:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- <u>Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym</u>

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n \subset \Omega$ spełniają warunki:

1. $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n, \quad i \ne j,$
2. $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \le i \le n$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + ... + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$$

- <u>Schemat Bernoulliego</u>

Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie *k* sukcesów w schemacie *n* prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad\qquad p + q = 1$$

gdzie:

$p$ – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,
$q$ – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie.

## 16. Parametry danych statystycznych

- <u>Średnia arytmetyczna</u>

Średnia arytmetyczna *n* liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

- <u>Średnia ważona</u>

Średnia ważona *n* liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

- <u>Średnia geometryczna</u>

Średnia geometryczna *n* nieujemnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

- Średnia harmoniczna

Średnia harmoniczna $n$ dodatnich liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego rosnąco ciągu $n$ danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ jest:

– dla $n$ nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu),

– dla $n$ parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu).

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją $n$ danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{\left(a_1-\overline{a}\right)^2+\left(a_2-\overline{a}\right)^2+\left(a_3-\overline{a}\right)^2+...+\left(a_n-\overline{a}\right)^2}{n}$$

Odchylenie standardowe $\sigma$ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ .

## 17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

| $\alpha$ [°] | **sin**$\alpha$ **cos** $\beta$ | **tg**$\alpha$ **ctg**$\beta$ | $\beta$ [°] |
|---|---|---|---|
| **0** | **0,0000** | **0,0000** | **90** |
| 1 | 0,0175 | 0,0175 | 89 |
| 2 | 0,0349 | 0,0349 | 88 |
| 3 | 0,0523 | 0,0524 | 87 |
| 4 | 0,0698 | 0,0699 | 86 |
| 5 | 0,0872 | 0,0875 | 85 |
| 6 | 0,1045 | 0,1051 | 84 |
| 7 | 0,1219 | 0,1228 | 83 |
| 8 | 0,1392 | 0,1405 | 82 |
| 9 | 0,1564 | 0,1584 | 81 |
| **10** | **0,1736** | **0,1763** | **80** |
| 11 | 0,1908 | 0,1944 | 79 |
| 12 | 0,2079 | 0,2126 | 78 |
| 13 | 0,2250 | 0,2309 | 77 |
| 14 | 0,2419 | 0,2493 | 76 |
| 15 | 0,2588 | 0,2679 | 75 |
| 16 | 0,2756 | 0,2867 | 74 |
| 17 | 0,2924 | 0,3057 | 73 |
| 18 | 0,3090 | 0,3249 | 72 |
| 19 | 0,3256 | 0,3443 | 71 |
| **20** | **0,3420** | **0,3640** | **70** |
| 21 | 0,3584 | 0,3839 | 69 |
| 22 | 0,3746 | 0,4040 | 68 |
| 23 | 0,3907 | 0,4245 | 67 |
| 24 | 0,4067 | 0,4452 | 66 |
| 25 | 0,4226 | 0,4663 | 65 |
| 26 | 0,4384 | 0,4877 | 64 |
| 27 | 0,4540 | 0,5095 | 63 |
| 28 | 0,4695 | 0,5317 | 62 |
| 29 | 0,4848 | 0,5543 | 61 |
| **30** | **0,5000** | **0,5774** | **60** |
| 31 | 0,5150 | 0,6009 | 59 |
| 32 | 0,5299 | 0,6249 | 58 |
| 33 | 0,5446 | 0,6494 | 57 |
| 34 | 0,5592 | 0,6745 | 56 |
| 35 | 0,5736 | 0,7002 | 55 |
| 36 | 0,5878 | 0,7265 | 54 |
| 37 | 0,6018 | 0,7536 | 53 |
| 38 | 0,6157 | 0,7813 | 52 |
| 39 | 0,6293 | 0,8098 | 51 |
| **40** | **0,6428** | **0,8391** | **50** |
| 41 | 0,6561 | 0,8693 | 49 |
| 42 | 0,6691 | 0,9004 | 48 |
| 43 | 0,6820 | 0,9325 | 47 |
| 44 | 0,6947 | 0,9657 | 46 |
| 45 | 0,7071 | 1,0000 | 45 |

| $\alpha$ [°] | **sin**$\alpha$ **cos** $\beta$ | **tg**$\alpha$ **ctg**$\beta$ | $\beta$ [°] |
|---|---|---|---|
| 46 | 0,7193 | 1,0355 | 44 |
| 47 | 0,7314 | 1,0724 | 43 |
| 48 | 0,7431 | 1,1106 | 42 |
| 49 | 0,7547 | 1,1504 | 41 |
| **50** | **0,7660** | **1,1918** | **40** |
| 51 | 0,7771 | 1,2349 | 39 |
| 52 | 0,7880 | 1,2799 | 38 |
| 53 | 0,7986 | 1,3270 | 37 |
| 54 | 0,8090 | 1,3764 | 36 |
| 55 | 0,8192 | 1,4281 | 35 |
| 56 | 0,8290 | 1,4826 | 34 |
| 57 | 0,8387 | 1,5399 | 33 |
| 58 | 0,8480 | 1,6003 | 32 |
| 59 | 0,8572 | 1,6643 | 31 |
| **60** | **0,8660** | **1,7321** | **30** |
| 61 | 0,8746 | 1,8040 | 29 |
| 62 | 0,8829 | 1,8807 | 28 |
| 63 | 0,8910 | 1,9626 | 27 |
| 64 | 0,8988 | 2,0503 | 26 |
| 65 | 0,9063 | 2,1445 | 25 |
| 66 | 0,9135 | 2,2460 | 24 |
| 67 | 0,9205 | 2,3559 | 23 |
| 68 | 0,9272 | 2,4751 | 22 |
| 69 | 0,9336 | 2,6051 | 21 |
| **70** | **0,9397** | **2,7475** | **20** |
| 71 | 0,9455 | 2,9042 | 19 |
| 72 | 0,9511 | 3,0777 | 18 |
| 73 | 0,9563 | 3,2709 | 17 |
| 74 | 0,9613 | 3,4874 | 16 |
| 75 | 0,9659 | 3,7321 | 15 |
| 76 | 0,9703 | 4,0108 | 14 |
| 77 | 0,9744 | 4,3315 | 13 |
| 78 | 0,9781 | 4,7046 | 12 |
| 79 | 0,9816 | 5,1446 | 11 |
| **80** | **0,9848** | **5,6713** | **10** |
| 81 | 0,9877 | 6,3138 | 9 |
| 82 | 0,9903 | 7,1154 | 8 |
| 83 | 0,9925 | 8,1443 | 7 |
| 84 | 0,9945 | 9,5144 | 6 |
| 85 | 0,9962 | 11,4301 | 5 |
| 86 | 0,9976 | 14,3007 | 4 |
| 87 | 0,9986 | 19,0811 | 3 |
| 88 | 0,9994 | 28,6363 | 2 |
| 89 | 0,9998 | 57,2900 | 1 |
| **90** | **1,0000** | **–** | **0** |